2022학년도 수시모집

모의 논술고사 문제지

시험과목	수학		
문제유형(시간)	오후(100분)		
지원학부(전공)	학부(전공)	성 명	
수 험 번 호		생년월일	

감독관의 지시가 있을 때까지 표지를 넘기지 마시오.

- 수험생 유의사항 -

1. 배부된 문제지의 인쇄상태(완전여부) 및 문제유형(오전/오후)을 확인한 후 이상이 없으면 문제지와 답안지에 지원학부(전공), 성명, 수험번호, 생년월일(6자리)을 정확하게 기입합니다.
2. 공학계열학부는『수학(5문항)』, 산업경영학부, 고용서비스정책학과 는『자료제시형 언어논술(4문항)』을 풀이합니다.
3. 수험생은 컴퓨터용싸인펜과 검정색샤프(또는 검정색연필), 지우개를 지참하여야 합니다. 싸인펜은 수험번호(10자리)•생년월일(6자리)•모집단위•성명을 기입할때 필요합니다. 샤프(또는 연필)는 답안작성에 필요합니다.
4. 답안 수정은 지우개를 활용하시면 됩니다.(지우개 찌꺼기가 답안지에 남지 않도록 주의). 지우개가 없을 경우에는 수정할 부분을 두 줄로 긋고 수정합니다. 수정테이프는 수험번호, 생년월일, 모집단위, 성명이 틀렸을 경우에만 활용할 수 있습니다.
5. 답안지에 주어진 문항 번호에 맞추어 답안을 작성하되, 반드시 작성 서식안(네모실선안)에 작성해야 합니다. 실선 바깥의 작성 내용은 채점하지 않아 불이익을 받을 수 있습니다. 답안지를 구기거나 낙서하지 않습니다. (연습지가 필요한 경우 문제지 공란 활용)
6. 수험 중 문의사항은 손을 든 다음 고사 중인 수험생에게 방해되지 않도록 감독관에게 문의합니다.
7. 고사가 끝나면 문제지 및 답안지를 모두 회수하므로, 외부로 가지고 나갈 수 없습니다.
8. 다음의 경우에는 부정행위자로 간주하여, 답안지는 무효로 하고 채점대상에서 제외합니다.

- 다른 수험생의 답안지를 보거나 보여주는 행위
- 부정한 휴대물을 보거나 무선기기 등을 이용하는 행위
- 다른 수험생에게 답을 보여주기를 강요하거나 위협하는 행위
- 다른 수험생과 손동작, 소리 등으로 서로 신호를 하는 행위
- 대리시험을 의뢰하거나 대리로 시험에 응시한 행위
- 고사 종료 후에도 계속 답안지를 작성하는 행위
- 감독관의 본인 확인 및 소지품 검색 요구에 따르지 않는 행위
- 고사장 반입 금지물품을 반입하고 고사 시작전 제출하지 않거나 전원을 끄지 않은 경우
- 고사시간 동안 휴대 가능 물품 외 모든 물품을 휴대하거나 감독관의 지시와 달리 임의 장소에 보관한 행위
- 기타 감독관의 정당한 지시에 불응하는 경우나 감독관이 부정행위로 판단하는 행위

9. 수험생은 시험 종료 전까지는 퇴실할 수 없으며, 천재지변 및 응급상황 등 불가피한 상황이 발생하는 경우에는 고사본부의 판단에 따라 행동합니다.

문항 1 [배점 : 20점]

두 함수 $f(x)$, $g(n)$이 주어진 조건을 만족시킬 때, 다음 물음에 답하시오. (20점)

(가) $f(x)=\begin{cases} 3x+1 & (x<1) \\ 2 & (x \ge 1) \end{cases}$

(나) $g(n)=\int_0^3 |x-(-1)^n| f(x)\,dx$ (단, n은 자연수)

(1) $g(1)+g(2)$의 값을 구하시오. (10점)

(2) $\sum_{k=1}^{n} g(k)=2011$을 만족하는 자연수 n의 값을 구하시오. (10점)

답안 및 해설 등 문항카드 정보

[출제범위] 수학Ⅱ

[핵심개념 및 용어] 수열의 합, 정적분

[출제의도] 고등학교 수학 교육과정에서 배우는 다항함수의 정적분을 구할 수 있고, Σ의 개념 및 그 성질을 이해하고, 이를 적용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

[출제근거]

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
1번 문항	교육과정	[수학Ⅰ]-(3) 수열 – 2. 수열의 합 ① Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [수학Ⅱ]-(3) 적분 – 2. 정적분 ① 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.
	성취 기준·수준	[수학Ⅰ]-(3) 수열 - (나) 수열의 합 [12수학Ⅰ03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [수학Ⅱ]-(3) 적분 - (나) 정적분 [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	천재교과서 수학Ⅰ	류희찬외10	천재교과서	2020	p.140
	천재교과서 수학Ⅱ	류희찬외10	천재교과서	2020	p.122
	미래엔 수학Ⅰ	황선욱외8	미래엔	2020	p.143
	미래엔 수학Ⅱ	황선욱외8	미래엔	2020	p.122

[문항해설]

본 문항의 핵심적인 내용은 「수학Ⅰ」의 수열 단원 중 수열의 합, 「수학Ⅱ」의 적분 단원 중 정적분에서 다루어진다. 따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 다항함수의 정적분을 구할 수 있고, Σ의 개념 및 그 성질을 이해하고 있는지, 이를 적용할 수 있는지, 그리고 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

[채점기준]

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	$g(1)=16$ 을 구할 수 있다.	5점
	$g(2)=5$ 를 구할 수 있다.	5점
1-2	$g(1)=g(3)=g(5)=\cdots$ 이고 $g(2)=g(4)=g(6)=\cdots$ 임을 구할 수 있다.	5점
	$\sum_{k=1}^{n} g(k)=2011$ 을 만족하는 $n=191$ 을 구할 수 있다.	5점

예시답안

(1) $g(1)$ 과 $g(2)$ 의 값을 차례로 구하면 다음과 같다.

$$g(1)=\int_0^3 |x-(-1)^1| f(x)\,dx = \int_0^3 |x+1| f(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 (x+1)(3x+1)\,dx + \int_1^3 2(x+1)\,dx = 16,$$

$$g(2)=\int_0^3 |x-(-1)^2| f(x)\,dx = \int_0^3 |x-1| f(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 -(x-1)(3x+1)\,dx + \int_1^3 2(x-1)\,dx = 5$$

따라서 $g(1)+g(2)=21$ 이다.

(2) $\sum_{k=1}^{n} g(k)=2011$ 을 만족하는 자연수 n 을 구하기 위해 다음의 2가지 경우를 고려해 보자.

(i) n 이 홀수인 경우

$g(1)=g(3)=g(5)=\cdots$ 이고 $g(2)=g(4)=g(6)=\cdots$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{n} g(k)=(16+5)\frac{(n-1)}{2}+16=2011$$

이다. 따라서 $n=191$ 이다.

(ⅱ) n이 짝수인 경우

경우 (ⅰ)과 같은 방식으로 n을 구해보면

$$\sum_{k=1}^{n} g(k) = (16+5)\frac{n}{2} = 2011$$

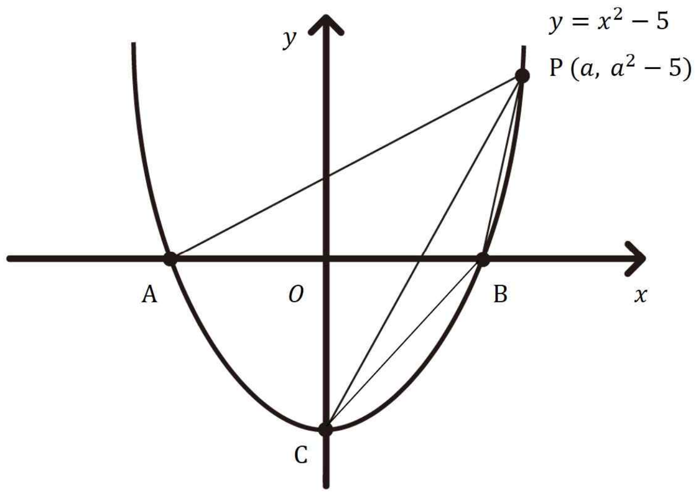
을 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.

위의 (ⅰ)-(ⅱ)의 결과로부터 $\sum_{k=1}^{n} g(k) = 2011$을 만족하는 자연수 n의 값은 191이다.

문항 2

[배점 : 20점]

아래 그림과 같이 곡선 $y=x^2-5$가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하고, y축과 만나는 점을 C라 하자.



곡선 $y=x^2-5$ 위의 점 $\mathrm{P}(\mathrm{a},\mathrm{a}^2-5)$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, $a>\sqrt{5}$) (20점)

(1) 삼각형 PAB의 넓이를 a에 관한 식으로 나타내시오. (8점)

(2) 삼각형 PAB와 삼각형 PCB의 넓이를 각각 $S(a)$, $T(a)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{a\to\sqrt{5}+}\frac{S(a)}{T(a)}$의 값을 구하시오. (12점)

답안 및 해설 등 문항카드 정보

[출제범위] 수학Ⅱ

[핵심개념 및 용어] 극한

[출제의도] 고등학교 수학 교육과정에서 배우는 극한의 개념 및 그 성질을 이해하고, 이를 적용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

[출제근거]

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
2번 문항	교육과정	[수학Ⅱ]-(1) 함수의 극한과 연속 – 1. 함수의 극한 ① 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
	성취 기준·수준	[수학Ⅱ]-(1) 함수의 극한과 연속 - (가) 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	천재교과서 수학Ⅱ	류희찬외10	천재교과서	2020	p.21
	미래엔 수학Ⅱ	황선욱외8	미래엔	2020	p.18

[문항해설]

본 문항의 핵심적인 내용은 「수학Ⅱ」의 함수의 극한과 연속 단원 중 함수의 극한에서 다루어진다. 따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 극한의 개념 및 그 성질을 이해하고 있는지, 이를 적용할 수 있는지, 그리고 풀이과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

[채점기준]

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	점의 좌표 $\mathrm{A}(-\sqrt{5}, 0)$, $\mathrm{B}(\sqrt{5}, 0)$를 구할 수 있다.	4점
	삼각형 PAB의 넓이 $S(a)=\sqrt{5}(a^2-5)$를 구할 수 있다.	4점
2-2	삼각형 PCB의 넓이 $T(a)=\dfrac{a^2}{2}\left(\sqrt{5}-\dfrac{5}{a}\right)$를 구할 수 있다.	8점
	극한값 $\lim\limits_{a\to\sqrt{5}+}\dfrac{S(a)}{T(a)}=4$를 구할 수 있다.	4점

예시답안

(1) 점 A, B는 곡선 $y=x^2-5$와 x축이 만나는 점이므로, 각각의 좌표는 $\mathrm{A}(-\sqrt{5}, 0)$, $\mathrm{B}(\sqrt{5}, 0)$이다. 삼각형 PAB의 넓이를 $S(a)$라 할 때, $a>\sqrt{5}$이므로

$$S(a)=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times(a^2-5)=\sqrt{5}(a^2-5)$$

이다.

(2) 점 C는 곡선 $y=x^2-5$와 y축이 만나는 점이므로, 점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(0, -5)$이다. 점 $\mathrm{P}(\mathrm{a}, \mathrm{a}^2-5)$와 $\mathrm{C}(0, -5)$를 지나는 직선을 l이라 하고, 직선 l과 x축과 만나는 점을 D라 하자. 직선 l의 방정식은 $y=ax-5$이고, 점 D의 좌표는 $\mathrm{D}\left(\frac{5}{\mathrm{a}}, 0\right)$이다. 삼각형 PCB의 넓이는 두 삼각형 PDB와 CBD에 대한 넓이의 합과 동일하므로, 삼각형 PCB의 넓이 $T(a)$는

$$T(a)=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{5}-\frac{5}{a}\right)\times(a^2-5)+\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{5}-\frac{5}{a}\right)\times 5=\frac{a^2}{2}\left(\sqrt{5}-\frac{5}{a}\right)$$

이다. 따라서 문제에서 구하고자 하는 극한값은 다음과 같다.

$$\lim_{a\to\sqrt{5}+}\frac{S(a)}{T(a)}=\lim_{a\to\sqrt{5}+}\frac{2(a+\sqrt{5})}{a}=4$$

문항 3 [배점 : 20점]

함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 물음에 답하시오. (20점)

(가) 함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체 집합이다.
(나) $0 \le x \le 4\pi$일 때 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$이다.
(다) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = f(x)$이다.
(라) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+8\pi) = f(x)$이다.

(1) $5\pi \le x \le 7\pi$일 때, 부등식 $|f(x)| \le \frac{1}{2}$의 해집합을 $\{x \mid \alpha \le x \le \beta\}$라 하자. $\beta - \alpha$의 값을 구하시오. (단, α와 β는 실수) (8점)

(2) $0 \le x \le 100\pi$일 때, 방정식 $f(x) = \frac{2}{5}$을 만족하는 모든 해의 합을 구하시오. (12점)

답안 및 해설 등 문항카드 정보

[출제범위] 수학Ⅰ

[핵심개념 및 용어] 삼각함수, 등차수열의 합

[출제의도] 고등학교 수학 교육과정에서 배우는 삼각함수의 개념과 그래프를 이해하고, 이를 적용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

[출제근거]

가) 교육과정 및 관련 성취기준

<table>
<tr><th colspan="2">문항 및 제시문</th><th>관련 성취기준</th></tr>
<tr><td rowspan="2">문항 3번</td><td>교육과정</td><td>[수학Ⅰ]-(2) 삼각함수 – 1. 삼각함수
① 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
[수학Ⅰ]-(3) 수열 – 1. 등차수열과 등비수열
① 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취 기준·수준</td><td>[수학Ⅰ]-(2) 삼각함수 - (가) 삼각함수
[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
[수학Ⅰ]-(3) 수열 - (가) 등차수열과 등비수열
[12수학Ⅰ03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	천재교과서 수학Ⅰ	류희찬외10	천재교과서	2020	p.84,124
	미래엔 수학Ⅰ	황선욱외8	미래엔	2020	p.81,123

[문항해설]

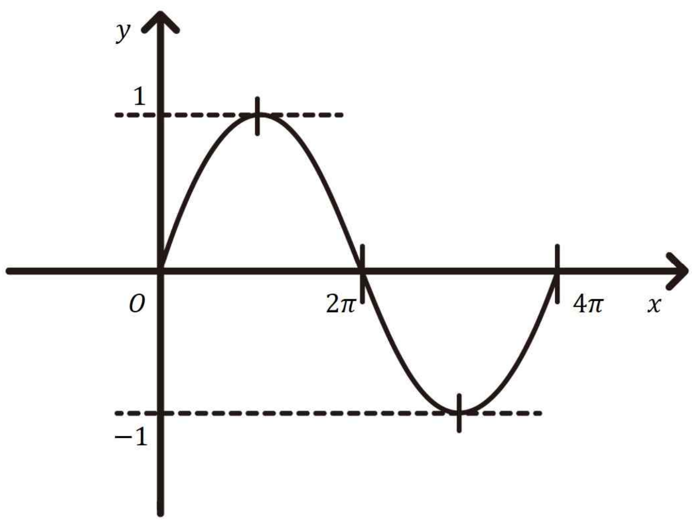
본 문항의 핵심적인 내용은 「수학Ⅰ」의 삼각함수 단원 중 삼각함수에서 다루어진다. 따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 삼각함수의 개념과 그래프를 이해하고 있는지, 이를 적용할 수 있는지, 그리고 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

[채점기준]

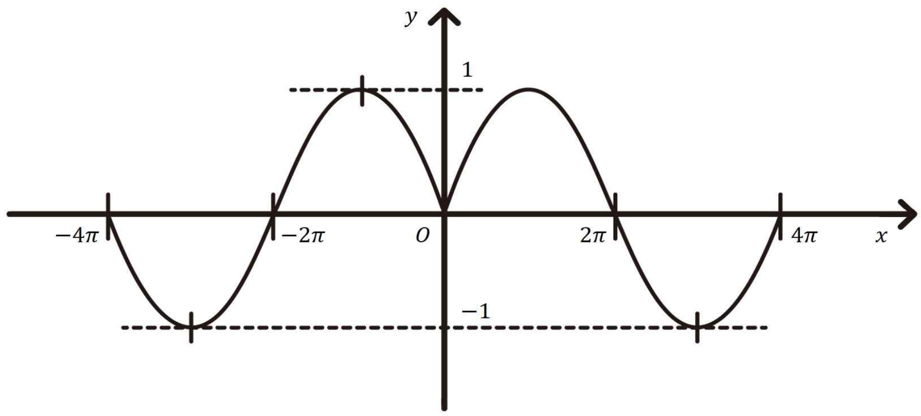
하위 문항	채점 기준	배점
3-1	$5\pi \le x \le 7\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프 개형을 옳게 그리거나 설명할 수 있다.	4점
	$\beta - \alpha = \frac{2}{3}\pi$ 임을 구할 수 있다.	4점
3-2	구간 $[0, 8\pi]$ 에서 해의 합 16π 를 구할 수 있다.	4점
	구간 $[0, 96\pi]$ 에서 해의 합 2304π 를 구할 수 있다.	4점
	구간 $[0, 100\pi]$ 에서 해의 합 2498π 를 구할 수 있다.	4점

예시답안

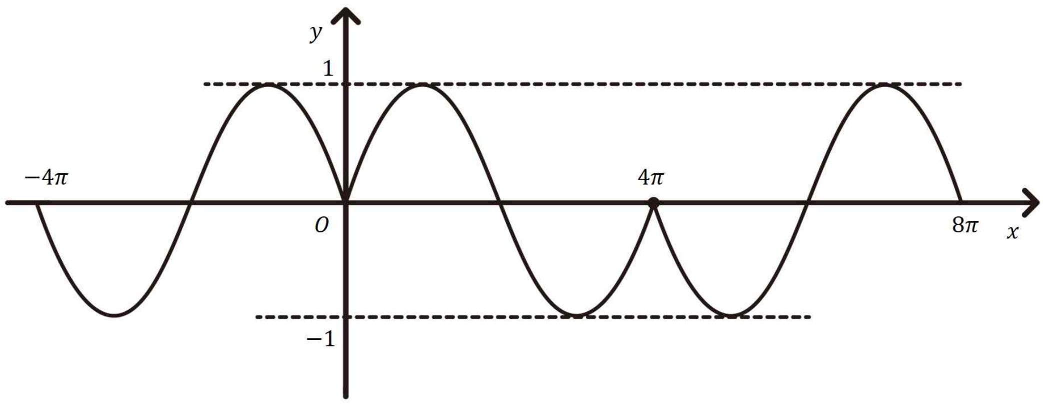
(1) 조건 (나)로부터 구간 $0 \le x \le 4\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프를 나타내면 다음과 같다.



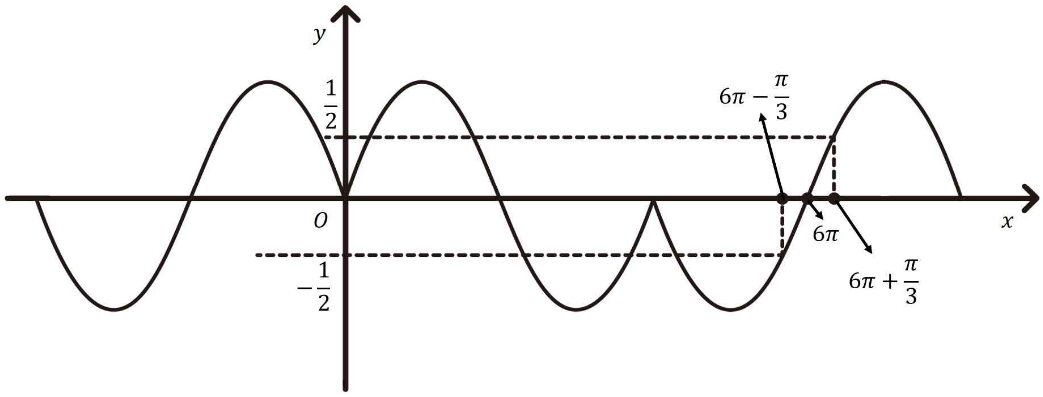
이어서 조건 (다)로부터 구간 $-4\pi \le x \le 4\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프를 나타내면 다음과 같다.



또한 조건 (라)로부터 주기가 8π임을 알 수 있고, 이를 이용하여 실수 전체에서 함수 $f(x)$의 그래프를 나타내면 다음과 같다.



여기서 $5\pi \leq x \leq 7\pi$일 때, 방정식 $f(x)=\frac{1}{2}$의 해는 $x=6\pi+\frac{\pi}{3}$이고 $f(x)=-\frac{1}{2}$의 해는 $x=6\pi-\frac{\pi}{3}$이다.

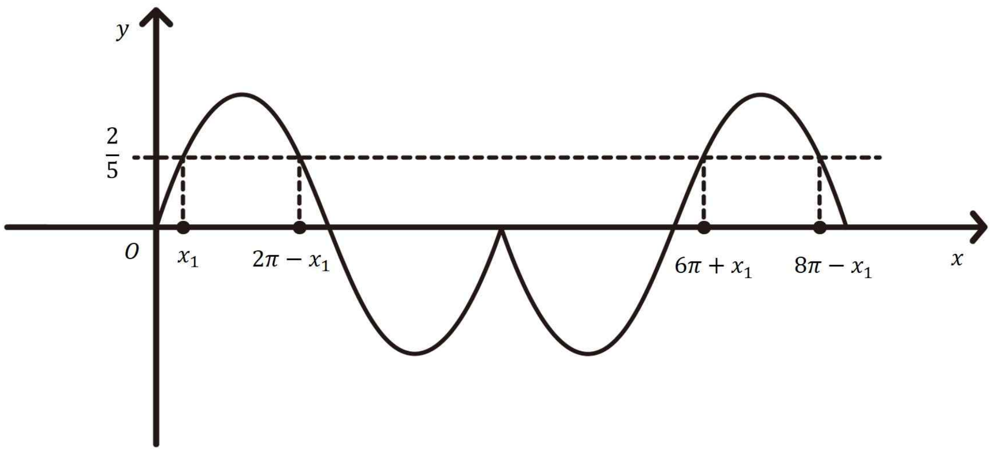


위의 그래프로부터 부등식 $|f(x)| \le \frac{1}{2}$ 의 해집합은

$$\left\{x \mid 6\pi - \frac{\pi}{3} \le x \le 6\pi + \frac{\pi}{3}\right\}$$

이고, 따라서 $\alpha = 6\pi - \frac{\pi}{3}$, $\beta = 6\pi + \frac{\pi}{3}$ 이다. 그러므로 $\beta - \alpha = \frac{2}{3}\pi$ 이다.

(2) $0 \le x \le 100\pi$ 일 때, 방정식 $f(x) = \frac{2}{5}$ 의 가장 작은 양의 해를 x_1이라 하자.



위의 그래프로부터 구간 $[0, 8\pi]$ 에서 해는 x_1, $2\pi - x_1$, $6\pi + x_1$, $8\pi - x_1$ 이므로 구간 $[0, 8\pi]$ 에서 해의 합은 16π 이다. 또한 함수 $f(x)$ 의 주기가 8π 이므로 구간 $[8\pi, 16\pi]$ 에서 해의 합은 $16\pi + 32\pi$ 이다.

같은 방법으로 구간 $[8(n-1)\pi, 8n\pi]$ 에서 해의 합을 a_n이라 하면

$a_n = 16\pi + 32(n-1)\pi$ (단, $1 \le n \le 12$)

이다.

즉, a_n은 첫째항이 $a_1 = 16\pi$ 이고 공차가 $d = 32\pi$ 인 등차수열이다.

따라서 구간 $[0, 96\pi]$ 에서 해의 합은 등차수열의 합의 공식으로부터

$$S_{12} = \sum_{i=1}^{12} a_i = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2} = \frac{12(2 \times 16\pi + 11 \times 32\pi)}{2} = 2304\pi$$ 이다.

또한 구간 $[96\pi, 100\pi]$ 에서의 해는 $96\pi + x_1$, $98\pi - x_1$ 이므로 이 구간에서의 해의 합은 194π 이다. 그러므로 $0 \le x \le 100\pi$ 일 때, 방정식 $f(x) = \frac{2}{5}$ 의 모든 해의 합은 $2304\pi + 194\pi = 2498\pi$ 이다.

문항 4 [배점 : 20점]

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 물음에 답하시오. (단, a, b는 상수) (20점)

모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x \{f(t)+f'(t)\}dt = xf(x)+\frac{3}{4}x^4+\frac{2}{3}ax^3+\frac{3}{2}x^2$ 이다.

(1) 도함수 $f'(x)$를 구하시오. (8점)

(2) 함수 $|f(x)|$가 서로 다른 두 개의 극솟값 $f(b)$, 2을 가질 때, $f(2b)$의 값을 구하시오. (단, $b>0$) (12점)

답안 및 해설 등 문항카드 정보

[출제범위] 수학Ⅱ

[핵심개념 및 용어] 도함수, 극대와 극소, 부정적분, 정적분

[출제의도] 고등학교 수학 교육과정에서 배우는 함수의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있고, 함수의 극대와 극소를 판정하여 그래프의 개형을 그릴 수 있고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있고, 정적분의 개념 및 그 성질을 이해하고, 이를 적용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

[출제근거]

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
수학4번	교육과정	[수학Ⅱ]-(2) 미분 – 2. 도함수 ① 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [수학Ⅱ]-(2) 미분 – 3. 도함수의 활용 ① 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [수학Ⅱ]-(3) 적분 – 1. 부정적분 ① 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다. [수학Ⅱ]-(3) 적분 – 2. 정적분 ① 정적분의 뜻을 안다.
	성취 기준·수준	[수학Ⅱ]-(2) 미분 - (나) 도함수 [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [수학Ⅱ]-(2) 미분 - (다) 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [수학Ⅱ]-(3) 적분 - (가) 부정적분 [12수학Ⅱ03-02] 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다. [수학Ⅱ]-(3) 적분 - (나) 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	천재교과서 수학Ⅱ	류희찬 외10	천재교과서	2020	p.60,86,116,122
	미래엔 수학Ⅱ	황선욱 외8	미래엔	2020	p.61,90,115,122

[문항해설]

본 문항의 핵심적인 내용은 「수학Ⅱ」의 미분 단원 중 도함수, 미분 단원 중 도함수의 활용, 적분 단원 중 부정적분, 적분 단원 중 정적분에서 다루어진다. 따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 함수의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있고, 함수의 극대와 극소를 판정하여 그래프의 개형을 그릴 수 있고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있고, 정적분의 개념 및 그 성질을 이해하고 있는지, 이를 적용할 수 있는지, 그리고 풀이과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

[채점기준]

하위 문항	채점 기준	배점
4-1	$a=-3$을 구할 수 있다.	4점
	도함수 $f'(x)=-3x(x-1)$을 구할 수 있다.	4점
4-2	$f(0)=2$와 $f(b)=0$을 구할 수 있다.	6점
	$b=2$를 구할 수 있다.	4점
	$f(2b)=-38$을 구할 수 있다.	2점

예시답안

(1) 문제의 주어진 조건에서 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)+f'(x)=f(x)+xf'(x)+3x^3+2ax^2+3x$$

$$(1-x)f'(x)=3x^3+2ax^2+3x \quad \text{---} \ ①$$

이다. 식 ①의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$0=3+2a+3$$

이고, 따라서 $a=-3$이다. $f(x)$는 다항함수이므로 식 ①로부터 다음의 결과를 얻을 수 있다.

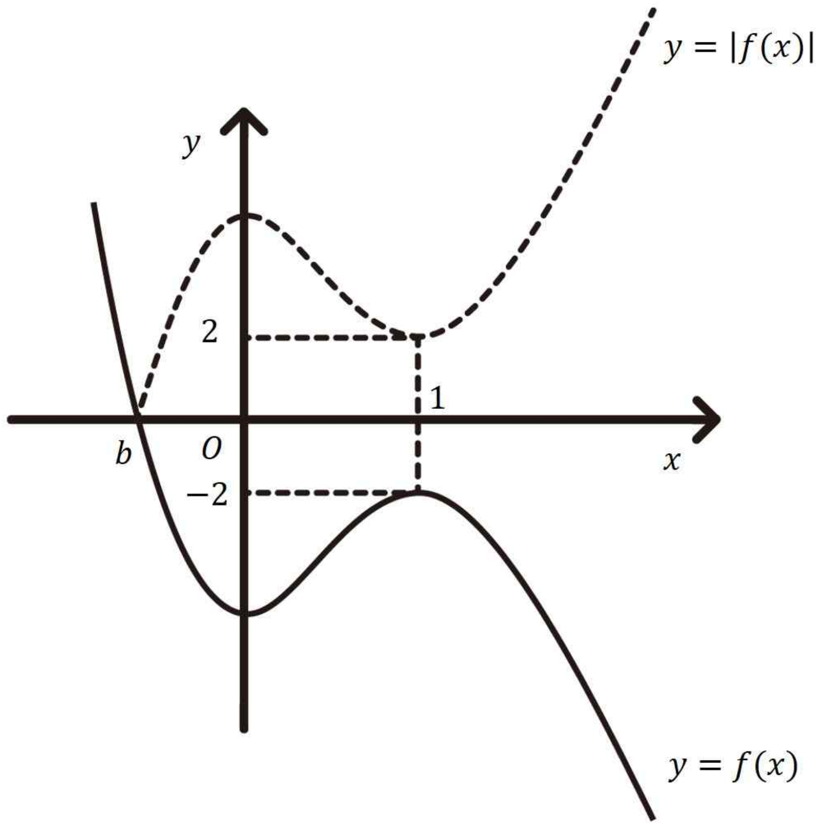
$$(1-x)f'(x)=3x^3-6x^2+3x$$

$$(1-x)f'(x)=3x(x-1)^2$$

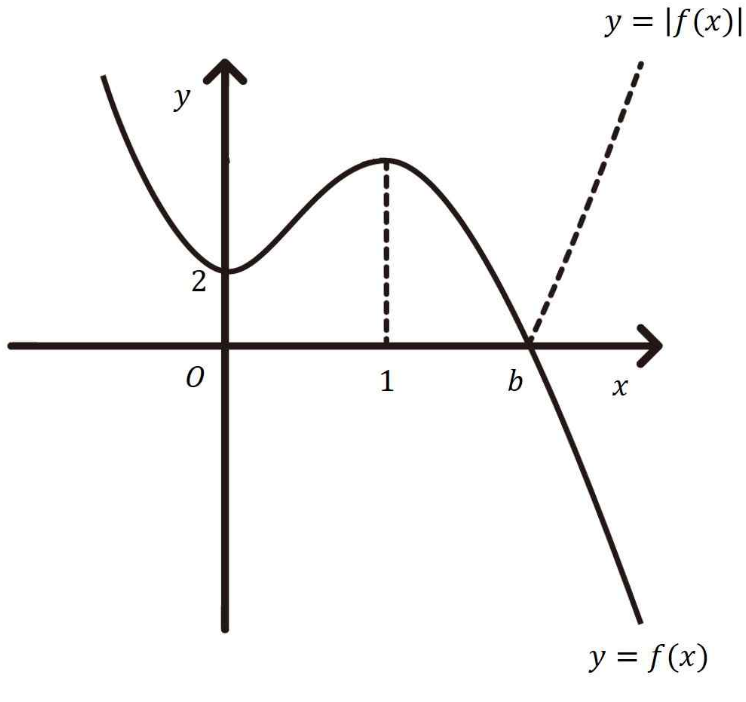
$$f'(x)=-3x(x-1) \quad \text{---} \ ②$$

(2) 식 ②로부터 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고 $x=1$에서 극대이다. 함수 $|f(x)|$가 서로 다른 두 개의 극솟값 $f(b)$, 2를 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프 개형은 다음과 같이 두 가지로 나눌 수 있다.

(i) 함수 $f(x)$의 극댓값이 -2인 경우



(ii) 함수 $f(x)$의 극솟값이 2인 경우



여기서 $b>0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 개형은 (ⅱ)의 경우가 되어야 할 것이다. 따라서 $f(0)=2$, $f(b)=0$ 이다. 식 ② 로부터 함수 $f(x)$ 는

$$f(x)=\int\{-3x(x-1)\}\,dx = -x^3+\frac{3}{2}x^2+C \quad (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

이므로, $f(0)=C=2$ 이고

$$f(b)= -b^3+\frac{3}{2}b^2+2= -\frac{1}{2}(2b^3-3b^2-4)= -\frac{1}{2}(b-2)(2b^2+b+2)=0$$

이다. 그러므로 $b=2$ ($b>0$) 이고 $f(2b)=f(4)= -38$ 이다.

문항 5 [배점 : 20점]

제시문을 읽고, 다음 물음에 답하시오. (20점)

(가) 집합 A에 대하여 A의 원소의 개수를 $n(A)$라고 하자.

(나) 자연수 m에 대하여 m의 양의 약수의 개수를 $f(m)$이라 하자.

(다) 자연수 m에 대하여 집합 B_m은

$$B_m = \{(a, b) \mid m = a\log_3 b \text{ 이고, } a\text{와 } b\text{는 자연수이다.}\}$$

으로 정의하자.

(1) 12의 서로 다른 양의 약수 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6에 대하여

$$c = \sum_{k=1}^{6} \left\{ (-1)^{f(a_k)} \times \log_2 a_k \right\}$$

일 때, 2^c의 값을 구하시오. (8점)

(2) 50 이하의 자연수 m에 대하여 $n(B_m) = 6$을 만족하는 자연수 m의 개수를 구하시오. (12점)

답안 및 해설 등 문항카드 정보

[출제범위] 수학Ⅰ

[핵심개념 및 용어] 로그, 수열의 합

[출제의도] 고등학교 수학 교육과정에서 배우는 로그와 Σ의 개념 및 그 성질을 이해하고, 이를 적용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

[출제근거]

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
수학5번	교육과정	[수학Ⅰ]-(1) 지수함수와 로그함수 – 1. 지수와 로그 ① 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [수학Ⅰ]-(3) 수열 – 2. 수열의 합 ① Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취 기준·수준	[수학Ⅰ]-(1) 지수함수와 로그함수 - (가) 지수와 로그 [12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [수학Ⅰ]-(3) 수열 - (나) 수열의 합 [12수학Ⅰ03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	천재교과서 수학Ⅰ	류희찬외10	천재교과서	2020	p.29,140
	미래엔 수학Ⅰ	황선욱외8	미래엔	2020	p.24,143

[문항해설]

본 문항의 핵심적인 내용은 「수학Ⅰ」의 지수함수와 로그함수 단원 중 지수와 로그, 그리고 수열 단원 중 수열의 합에서 다루어진다. 따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 로그와 Σ의 개념 및 그 성질을 이해하고 있는지, 이를 적용할 수 있는지, 그리고 풀이과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

[채점기준]

하위 문항	채점 기준	배점
5-1	식 $c = -\{\log_2 1 + \log_2 4\} + \{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 6 + \log_2 12\}$ 를 구할 수 있다.	4점
	$2^c = 108$ 을 구할 수 있다.	4점
5-2	방정식 $b^a = 3^m$ 을 구할 수 있다.	4점
	서로 다른 소수가 1 개인 경우 또는 2 개인 경우 중 한 가지에 대하여 m 의 값을 구할 수 있다.	4점
	m 의 개수의 총합 8 을 구할 수 있다.	4점

예시답안

(1) 12 의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12 이고, 각각의 약수의 개수는 1, 2, 2, 3, 4, 6 이다. $f(1)$ 과 $f(4)$ 는 홀수이고, $f(2)$, $f(3)$, $f(6)$, $f(12)$ 는 짝수이다. 그러면

$$c = -\{\log_2 1 + \log_2 4\} + \{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 6 + \log_2 12\}$$
$$= \log_2 \frac{2 \times 3 \times 6 \times 12}{1 \times 4} = \log_2 108$$

이고, 따라서 $2^c = 108$ 이다.

(2) $m = a\log_3 b$ 일 때, $m = \log_3 b^a$ 이고 $b^a = 3^m$ 이다.

어떤 자연수 k 에 대하여 $b = 3^k$ 이면, $3^{ka} = 3^m$ 이고 $ka = m$ 이다.

$n(B_m) = 6$ 을 만족하기 위해서는 m 의 약수의 개수는 6 이어야 할 것이다.

m 을 소인수분해 했을 때, 다음과 같이 서로 다른 소수의 개수에 따라 분류하여 문제를 해결하고자 한다.

(i) m 을 소인수분해 했을 때 서로 다른 소수가 1 개인 경우

즉, $m = p^a$ (단, p 는 소수) 이고 이 경우에 대한 약수의 개수는 $a+1$ 이다. m 의 약수의 개수는 6 이어야 하므로 $a = 5$ 이어야 할 것이고, 50 이하의 자연수 중에서는 $m = 2^5 = 32$ 인 경우만 가능하다.

(ⅱ) m을 소인수분해 했을 때 서로 다른 소수가 2개인 경우

즉, $m=p^a q^b$ (단, p와 q는 소수, $a \le b$) 이고 이 경우에 대한 약수의 개수는 $(a+1)(b+1)$ 이다. m의 약수의 개수는 6이어야 하므로 $a=1$, $b=2$이어야 할 것이고, $(p, q)=(2, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 2)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, $(7, 2)$, $(11, 2)$에 대하여 자연수 m은

$$m=2\times 3^2,\ 2\times 5^2,\ 3\times 2^2,\ 5\times 2^2,\ 5\times 3^2,\ 7\times 2^2,\ 11\times 2^2$$

이다. 즉, $m=18$, 50, 12, 20, 45, 28, 44인 경우 가능하다.

(ⅲ) m을 소인수분해 했을 때 서로 다른 소수가 3개 이상인 경우

이 경우 주어진 상황을 만족하는 자연수 m은 없다.

위의 (ⅰ)-(ⅲ)의 결과로부터 문제의 상황을 만족하는 자연수 m의 총 개수는 8이다.